22147230

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Jueves 15 de mayo de 2014 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 14]*

La variable aleatoria X tiene como distribución de probabilidad $\mathrm{Po}(8)$.

(a) (i) Halle $\mathrm{P}(X = 6)$.

(ii) Halle $\mathrm{P}(X = 6 \mid 5 \le X \le 8)$. *[5]*

(b) $\bar{X}$ denota la media muestral de n observaciones independientes de X, $n > 1$.

(i) Escriba $\mathrm{E}(\bar{X})$ y $\mathrm{Var}(\bar{X})$.

(ii) A partir de lo anterior, dé una razón que explique por qué $\bar{X}$ no es una distribución de Poisson. *[3]*

(c) De la distribución de X se toma una muestra aleatoria compuesta por 40 observaciones.

(i) Halle $\mathrm{P}(7{,}1 < \bar{X} < 8{,}5)$.

(ii) Sabiendo que $\mathrm{P}(|\bar{X} - 8| \le k) = 0{,}95$, halle el valor de k. *[6]*

2. *[Puntuación máxima: 16]*

La siguiente tabla muestra el promedio de la producción de aceitunas por árbol, en kg, y la lluvia caída, en cm, en nueve regiones distintas de Grecia. Puede suponer que estos datos constituyen una muestra aleatoria tomada de una distribución normal bidimensional de coeficiente de correlación ρ .

Lluvia caída (x)	11	10	15	13	7	18	22	20	28
Producción (y)	56	53	67	61	54	78	86	88	78

Un científico desea utilizar estos datos para determinar si existe una correlación positiva entre la lluvia caída y la producción.

(a) Indique las hipótesis apropiadas. *[2]*

(b) Determine el coeficiente de correlación momento-producto para estos datos. *[2]*

(c) Determine el correspondiente valor del parámetro p y, en el contexto de la pregunta, haga algún comentario sobre este valor. *[2]*

(d) Halle la ecuación de la recta de regresión de y sobre x . *[2]*

(e) A partir de lo anterior, estime la producción por árbol en una décima región donde la lluvia caída haya sido de 19 cm. *[2]*

(f) Determine el ángulo que forman la recta de regresión de y sobre x y la de x sobre y . Dé la respuesta aproximando al grado más cercano. *[6]*

3. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Considere la variable aleatoria X, para la cual $\mathrm{E}(X) = a\lambda + b$, donde a y b son constantes y λ es un parámetro.

Muestre que $\frac{X-b}{a}$ es un estimador sin sesgo de λ. *[3]*

(b) La variable aleatoria continua Y tiene función densidad de probabilidad

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2}{9}(3 + y - \lambda), & \text{para } \lambda - 3 \le y \le \lambda \\ 0, & \text{resto de los casos} \end{cases}$$

donde λ es un parámetro.

(i) Verifique que $f(y)$ es una función densidad de probabilidad para todo valor de λ.

(ii) Determine $\mathrm{E}(Y)$.

(iii) Escriba un estimador sin sesgo de λ. *[11]*

4. *[Puntuación máxima: 16]*

Considere la variable aleatoria $X \sim \text{Geo}(p)$.

(a) Indique $\text{P}(X < 4)$. *[2]*

(b) Muestre que la función generatriz de probabilidad para X viene dada por $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$, donde $q = 1 - p$. *[3]*

Sea la variable aleatoria $Y = 2X$.

(c) (i) Muestre que la función generatriz de probabilidad para Y viene dada por $G_Y(t) = G_X\left(t^2\right)$.

(ii) Habiendo considerado $G_Y'(1)$, muestre que $\text{E}(Y) = 2\text{E}(X)$. *[6]*

Sea la variable aleatoria $W = 2X + 1$.

(d) (i) Halle la función generatriz de probabilidad para W en términos de la función generatriz de probabilidad de Y.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $\text{E}(W) = 2\text{E}(X) + 1$. *[5]*